Équation de Schrödinger logarithmique : dynamique en temps long, régime dispersif

Guillaume Ferriere

IRMA

Strasbourg, 14 septembre 2021

Sommaire

1. Introduction
2. Solutions gaussiennes
3. Régime dispersif

Outline

1. Introduction
   - Présentation de l'équation
   - Premières propriétés
   - Problème de Cauchy
2. Solutions gaussiennes
3. Régime dispersif

Équation de Schrödinger logarithmique

Équation de Schrödinger non-linéaire avec non-linéarité logarithmique

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta u + \lambda\, u \ln|u|^2 = 0, \tag{logNLS}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N}^*)$.

Équation de Schrödinger logarithmique

Équation de Schrödinger non-linéaire avec non-linéarité logarithmique

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta u + \lambda\, u \ln|u|^2 = 0, \qquad \text{(logNLS)}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$).

Séparabilité des variables (Białynicki-Birula & Mycielski, 1976)

Si u_1 (resp. u_2) vérifie (logNLS) en dimension d_1 (resp. d_2), alors

$$u(t) := u_1(t) \otimes u_2(t)$$

vérifie (logNLS) en dimension $d := d_1 + d_2$.

Invariants et quantités conservées

Invariants usuels pour une équation de Schrödinger (non-linéaire) :

- Translation en espace/temps
- Invariance Galiléenne
- Multiplication par un complexe de module 1
- Rotation en espace

Invariants et quantités conservées

Invariants usuels pour une équation de Schrödinger (non-linéaire) :

- Translation en espace/temps
- Invariance Galiléenne
- Multiplication par un complexe de module 1
- Rotation en espace

Effet d'échelle

Si $u = u(t,x)$ est solution de (logNLS), alors pour tout $\kappa > 0$, $\kappa u(t,x)\, e^{2it\lambda \ln \kappa}$ l'est également.

Invariants et quantités conservées

Invariants usuels pour une équation de Schrödinger (non-linéaire) :

- Translation en espace/temps
- Invariance Galiléenne
- Multiplication par un complexe de module 1
- Rotation en espace

Effet d'échelle

Si $u = u(t,x)$ est solution de (logNLS), alors pour tout $\kappa > 0$, $\kappa u(t,x)\, e^{2it\lambda \ln \kappa}$ l'est également.

Quantités conservées :

- Masse $M(v) := \|v\|_{L^2}^2$
- Moment $\mathcal{J}(v) := \operatorname{Im} \int \overline{v(x)}\, \nabla v(x)\, \mathrm{d}x$,
- Énergie

$$E(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2}^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|^2 \left(\ln |v(x)|^2 - 1\right) \mathrm{d}x.$$

Problème de Cauchy

Théorie de Cauchy pour $\lambda > 0$ (Cazenave & Haraux (1980); Cazenave (2003))

Pour toute donnée initiale $u_{\mathrm{in}} \in W(\mathbb{R}^d) := \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^d), |v|^2 \ln |v|^2 \in L^1(\mathbb{R}^d) \right\}$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, W(\mathbb{R}^d))$ de (logNLS) pour $\lambda > 0$.

Problème de Cauchy

Théorie de Cauchy pour $\lambda > 0$ (Cazenave & Haraux (1980); Cazenave (2003))

Pour toute donnée initiale $u_{\text{in}} \in W(\mathbb{R}^d) := \left\{v \in H^1(\mathbb{R}^d), |v|^2 \ln |v|^2 \in L^1(\mathbb{R}^d)\right\}$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, W(\mathbb{R}^d))$ de (logNLS) pour $\lambda > 0$.

Théorie de Cauchy pour $\lambda < 0$ (Guerrero, López & Nieto (2010); Carles & Gallagher (2018))

Pour toute donnée initiale $u_{\text{in}} \in H^1 \cap \mathcal{F}(H^\alpha)(\mathbb{R}^d)$ pour un $\alpha \in (0,1]$, il existe une unique solution $u \in L^\infty_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}, H^1 \cap \mathcal{F}(H^\alpha)(\mathbb{R}^d)\right) \cap \mathcal{C}\left(\mathbb{R}, H^{-1} \cap L^2_w(\mathbb{R}^d)\right)$ de (logNLS) pour $\lambda < 0$.

Outline

1. Introduction
2. Solutions gaussiennes
   - Solutions gaussiennes générales
   - Cas focalisant
   - Cas défocalisant
3. Régime dispersif

Solutions gaussiennes

Solutions gaussiennes

Remarque (Białynicki-Birula & Mycielski, 1976)

Toute donnée initiale gaussienne donne une solution gaussienne explicite, de la forme (à un facteur multiplicatif et aux invariants près):

$$B^A(t,x) = \Big(\det \operatorname{Re} A(t)\Big)^{\frac{1}{4}} \exp\Big[i\phi^A(t) - \frac{1}{2} x^\top A(t) x\Big],$$

avec

$$\frac{\mathrm{d}\phi^A}{\mathrm{d}t} = -\lambda d + \operatorname{Tr} \operatorname{Re} A - \frac{\lambda}{2} \ln\Big(\det \operatorname{Re} A\Big).$$

Solutions gaussiennes

Remarque (Białynicki-Birula & Mycielski, 1976)

Toute donnée initiale gaussienne donne une solution gaussienne explicite, de la forme (à un facteur multiplicatif et aux invariants près):

$$B^A(t,x) = \left(\det \operatorname{Re} A(t)\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[i\phi^A(t) - \frac{1}{2}x^\top A(t)x\right],$$

avec

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -iA(t)^2 + 2i\lambda \operatorname{Re} A(t).$$

Solutions gaussiennes

Remarque (Białynicki-Birula & Mycielski, 1976)

Toute donnée initiale gaussienne donne une solution gaussienne explicite, de la forme (à un facteur multiplicatif et aux invariants près):

$$B^A(t,x) = \Big(\det \operatorname{Re} A(t)\Big)^{\frac{1}{4}} \exp\Big[i\phi^A(t) - \frac{1}{2}x^\top A(t)x\Big],$$

avec

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -iA(t)^2 + 2i\lambda \operatorname{Re} A(t).$$

En dimension $d = 1$,

$$A(t) = \frac{1}{r(t)^2} - i\frac{\dot r(t)}{r(t)},$$

avec $r = r(t)$ réel et

$$\ddot r = \frac{1}{r^3} - \frac{2\lambda}{r}.$$

Gaussons et breathers

Dans le cas $\lambda > 0$:

- r périodique
- Une solution particulière stationnaire : le Gausson $G^d(x) := \exp\left(\frac{d}{2} - \lambda|x|^2\right)$.

Gaussons et breathers

Dans le cas $\lambda > 0$:

- r périodique
- Une solution particulière stationnaire : le Gausson $G^d(x) := \exp\left(\frac{d}{2} - \lambda|x|^2\right)$.

Théorème (Ardila, 2016, dans la suite du travail de Cazenave, 1983)

Le Gausson est orbitalement stable.

Gaussons et breathers

Dans le cas $\lambda > 0$:

- r périodique
- Une solution particulière stationnaire : le Gausson $G^d(x) := \exp\left(\frac{d}{2} - \lambda|x|^2\right)$.

Théorème (Ardila, 2016, dans la suite du travail de Cazenave, 1983)

Le Gausson est orbitalement stable.

- Une infinité de structures non-dispersives qui ne sont pas des points critiques de l'énergie

Multi-Gaussons et multi-gaussiennes

Théorème (Ferriere, 2020)

Pour toute famille de solutions gaussiennes $(B_k)_{1\leq k\leq N}$ *de vitesses respectives* v_k *telle que* $v_* := \min_{j\neq k}|v_j - v_k| > 0$, *il existe une solution* $u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, W(\mathbb{R}^d))$ *de logNLS,* $\sigma_- > 0$ *et un temps* $T \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\left\| u(T+t) - \sum_{k=1}^{N} B_k(T+t) \right\|_{L^2} \leq e^{-\frac{\sigma_-(v_* t)^2}{4}}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Multi-Gaussons et multi-gaussiennes

Théorème (Ferriere, 2020)

Pour toute famille de solutions gaussiennes $(B_k)_{1\leq k\leq N}$ *de vitesses respectives* v_k *telle que* $v_* := \min_{j\neq k}|v_j - v_k| > 0$, *il existe une solution* $u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, W(\mathbb{R}^d))$ *de logNLS,* $\sigma_- > 0$ *et un temps* $T \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\left\| u(T+t) - \sum_{k=1}^{N} B_k(T+t) \right\|_{L^2} \leq e^{-\frac{\sigma_-(v_* t)^2}{4}}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Si tous les B_k *sont des Gaussons, alors* $\sigma_- = \lambda$ *et la convergence est également valable dans* $H^1 \cap \mathcal{F}(H^1)$.

Multi-Gaussons et multi-gaussiennes

Théorème (Ferriere, 2020)

Pour toute famille de solutions gaussiennes $(B_k)_{1 \leq k \leq N}$ *de vitesses respectives* v_k *telle que* $v_* := \min_{j \neq k} |v_j - v_k| > 0$*, il existe une solution* $u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, W(\mathbb{R}^d))$ *de logNLS,* $\sigma_- > 0$ *et un temps* $T \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\left\| u(T+t) - \sum_{k=1}^{N} B_k(T+t) \right\|_{L^2} \leq e^{-\frac{\sigma_-(v_* t)^2}{4}}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Si tous les B_k *sont des Gaussons, alors* $\sigma_- = \lambda$ *et la convergence est également valable dans* $H^1 \cap \mathcal{F}(H^1)$*.*

Remarque (Rigidité)

Toute solution v de logNLS différente de la multi-gaussienne construite vérifie

$$\left\| v(t) - \sum B_k(t) \right\|_{L^2} \geq C_1 e^{-2\lambda t}, \qquad \forall t \geq T_1,$$

pour deux constantes $T_1, C_1 > 0$

Cas défocalisant

On suppose maintenant $\lambda < 0$. Alors $r(t)$ a un équivalent ne dépendant pas de sa donnée initiale:

Lemme (Carles & Gallagher, 2018)

$r(t) \sim 2t\sqrt{|\lambda| \ln t}$ et $\dot{r}(t) \sim 2\sqrt{|\lambda| \ln t}$.

Cas défocalisant

On suppose maintenant $\lambda < 0$. Alors $r(t)$ a un équivalent ne dépendant pas de sa donnée initiale:

Lemme (Carles & Gallagher, 2018)

$r(t) \sim 2t\sqrt{|\lambda| \ln t}$ et $\dot{r}(t) \sim 2\sqrt{|\lambda| \ln t}$.

En particulier, le terme $\frac{1}{r^3}$ est négligeable.

Lemme (Carles & Gallagher, 2018)

Soit τ la solution de

$$\ddot{\tau} = \frac{2|\lambda|}{\tau}, \qquad \tau(0) = 1, \qquad \dot{\tau}(0) = 0.$$

Alors $\tau(t) \sim 2t\sqrt{|\lambda| \ln t}$ et $\dot{\tau}(t) \sim 2\sqrt{|\lambda| \ln t}$.

Plusieurs remarques

Plusieurs remarques

- La vitesse de dispersion τ est plus rapide que pour les non-linéarités lisses.

Plusieurs remarques

- La vitesse de dispersion τ est plus rapide que pour les non-linéarités lisses.
- Après renormalisation par la vitesse de dispersion et par la norme L^2 de la donnée initiale, le module de la gaussienne tend vers une gaussienne universelle:

$$\gamma(y) = e^{-\frac{|y|^2}{2}}.$$

Plusieurs remarques

- La vitesse de dispersion τ est plus rapide que pour les non-linéarités lisses.
- Après renormalisation par la vitesse de dispersion et par la norme L^2 de la donnée initiale, le module de la gaussienne tend vers une gaussienne universelle:

$$\gamma(y) = e^{-\frac{|y|^2}{2}}.$$

- La phase $e^{i\frac{\dot{r}(t)}{r(t)}\frac{|x|^2}{2}}$ a elle aussi un équivalent en temps long indépendant de la donnée initiale:

$$e^{i\frac{|x|^2}{2t}}.$$

Outline

1 Introduction

2 Solutions gaussiennes

3 Régime dispersif
- Dynamique universelle
- Preuve
- Limite semi-classique
- Equation cinétique associée

Dynamique universelle

Théorème (Carles & Gallagher, 2018)

Soit $u_{\mathrm{in}} \in H^1 \cap \mathcal{F}(H^1)(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$*, u la solution de* (logNLS) *et v définie par:*

$$u(t,x) = \frac{1}{\tau(t)^{\frac{d}{2}}} \frac{\|u_{\mathrm{in}}\|_{L^2}}{\|\gamma\|_{L^2}} v\left(t, \frac{x}{\tau(t)}\right) e^{i \frac{\dot{\tau}(t)}{\tau(t)} \frac{|x|^2}{2}}.$$

Alors, quand $t \to \infty$,

$$|v(t)|^2 \rightharpoonup \gamma^2 \qquad \textit{faiblement dans } L^1,$$

$$\int |y|^j |v(t,y)|^2 \,\mathrm{d}y \to \int |y|^j \gamma(y)^2 \,\mathrm{d}y,$$

pour $j = 0, 1, 2$.

Remarques

- Les remarques faites dans le cas gaussien restent vraies dans le cas général.
- La différence notable se situe au niveau de la convergence de $|v(t)|^2$.
- Les conclusions donnent également une convergence de $|v(t)|^2$ vers γ^2 en distance de Wasserstein

$$\mathcal{W}_p(\nu_1, \nu_2) = \inf \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x-y|^p \, \mathrm{d}\mu(x,y) \right)^{\frac{1}{p}} ; \quad (\pi_j)_\# \mu = \nu_j \right\},$$

pour $p = 1$ et 2.

Remarques

- Les remarques faites dans le cas gaussien restent vraies dans le cas général.
- La différence notable se situe au niveau de la convergence de $|v(t)|^2$.
- Les conclusions donnent également une convergence de $|v(t)|^2$ vers γ^2 en distance de Wasserstein

$$\mathcal{W}_p(\nu_1, \nu_2) = \inf \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x-y|^p \, \mathrm{d}\mu(x,y) \right)^{\frac{1}{p}} ; \quad (\pi_j)_\# \mu = \nu_j \right\},$$

pour $p = 1$ et 2.

Questions :

- Peut-on améliorer la précision de cette convergence ?
- Que se passe-t-il dans le cadre semi-classique $\varepsilon \to 0$?

$$i\varepsilon \partial_t u_\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon \ln |u_\varepsilon|^2 = 0. \qquad (\text{logNLS}_\varepsilon)$$

Dynamique universelle, part 2

Théorème (Ferriere, 2019)

Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $u_{\varepsilon,\mathrm{in}} \in H^1 \cap \mathcal{F}(H^1)(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$, u_ε *la solution de* $(\mathrm{logNLS}_\varepsilon)$ *et* v_ε *définie par:*

$$u_\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\tau(t)^{\frac{d}{2}}} \frac{\|u_{\mathrm{in}}\|_{L^2}}{\|\gamma\|_{L^2}} v_\varepsilon\left(t, \frac{x}{\tau(t)}\right) e^{i\,\frac{\dot\tau(t)}{\tau(t)}\frac{|x|^2}{2\varepsilon}}.$$

On définit également pour $f = f(y) \in H^1 \cap \mathcal{F}(H^1)$

$$\tilde{E}^0_\varepsilon(f) := |\lambda| \int_{\mathbb{R}^d} \left(|y|^2 + \left|\ln|f|^2\right|\right) |f|^2 \,\mathrm{d}y + \varepsilon^2 \|\nabla_y f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Alors il existe $C = C\left(\tilde{E}^0_\varepsilon(v_{\varepsilon,in})\right)$ *croissante telle que pour tout* $t \geq 2$

$$\mathcal{W}_1\left(\frac{|v_\varepsilon(t,.)|^2}{\pi^{\frac{d}{2}}}, \frac{\gamma^2}{\pi^{\frac{d}{2}}}\right) \leq C\frac{1}{\sqrt{\ln t}}.$$

Equation et énergie pour v_ε

- v_ε satisfait

$$i\varepsilon\partial_t v_\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2\tau(t)^2}\Delta v_\varepsilon + \lambda v_\varepsilon \ln\left|\frac{v_\varepsilon}{\gamma}\right|^2 = \phi(t)v_\varepsilon.$$

Equation et énergie pour v_ε

- v_ε satisfait après changement de phase

$$i\varepsilon\partial_t v_\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2\tau(t)^2}\Delta v_\varepsilon + \lambda v_\varepsilon \ln\left|\frac{v_\varepsilon}{\gamma}\right|^2 = 0.$$

Equation et énergie pour v_ε

- v_ε satisfait après changement de phase

$$i\varepsilon\partial_t v_\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2\tau(t)^2}\Delta v_\varepsilon + \lambda v_\varepsilon \ln\left|\frac{v_\varepsilon}{\gamma}\right|^2 = 0.$$

- L'énergie modifiée définie par

$$\mathcal{E}^\varepsilon_{\text{kin}}(t) := \frac{\varepsilon^2}{2\,\tau(t)^2}\|\nabla v_\varepsilon(t)\|^2_{L^2}, \qquad \mathcal{E}^\varepsilon_{\text{ent}}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} |v_\varepsilon(t,y)|^2 \ln\left|\frac{v_\varepsilon(t,y)}{\gamma(y)}\right|^2 \mathrm{d}y,$$

$$\mathcal{E}^\varepsilon := \mathcal{E}^\varepsilon_{\text{kin}} + |\lambda|\,\mathcal{E}^\varepsilon_{\text{ent}},$$

satisfait

$$\dot{\mathcal{E}}^\varepsilon = -2\frac{\dot\tau(t)}{\tau(t)}\mathcal{E}^\varepsilon_{\text{kin}}.$$

Equation et énergie pour v_ε

- v_ε satisfait après changement de phase

$$i\varepsilon\partial_t v_\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2\tau(t)^2}\Delta v_\varepsilon + \lambda v_\varepsilon \ln\left|\frac{v_\varepsilon}{\gamma}\right|^2 = 0.$$

- L'énergie modifiée définie par

$$\mathcal{E}^\varepsilon_{\mathrm{kin}}(t) := \frac{\varepsilon^2}{2\,\tau(t)^2}\|\nabla v_\varepsilon(t)\|^2_{L^2}, \qquad \mathcal{E}^\varepsilon_{\mathrm{ent}}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} |v_\varepsilon(t,y)|^2 \ln\left|\frac{v_\varepsilon(t,y)}{\gamma(y)}\right|^2 \mathrm{d}y,$$

$$\mathcal{E}^\varepsilon := \mathcal{E}^\varepsilon_{\mathrm{kin}} + |\lambda|\,\mathcal{E}^\varepsilon_{\mathrm{ent}},$$

satisfait

$$\dot{\mathcal{E}}^\varepsilon = -2\frac{\dot\tau(t)}{\tau(t)}\mathcal{E}^\varepsilon_{\mathrm{kin}}.$$

$\mathcal{E}^\varepsilon$ est donc décroissante.

Estimées sur v_ε

- Définissons les parties positives et négatives de cette énergie modifiée:

$$\mathcal{E}_+^\varepsilon := \mathcal{E}_{\mathrm{kin}}^\varepsilon + |\lambda| \int_{|v_\varepsilon|>1} |v_\varepsilon|^2 \ln |v_\varepsilon|^2 + |\lambda| \int |y|^2 |v_\varepsilon|^2 \geq 0,$$

$$\mathcal{E}_-^\varepsilon := -|\lambda| \int_{|v_\varepsilon|\leq 1} |v_\varepsilon| \ln |v_\varepsilon|^2 \geq 0,$$

ainsi que $\tilde{E}_\varepsilon := \mathcal{E}_+^\varepsilon + \mathcal{E}_-^\varepsilon$

Estimées sur v_ε

- Définissons les parties positives et négatives de cette énergie modifiée:

$$\mathcal{E}_+^\varepsilon := \mathcal{E}_{\text{kin}}^\varepsilon + |\lambda| \int_{|v_\varepsilon|>1} |v_\varepsilon|^2 \ln |v_\varepsilon|^2 + |\lambda| \int |y|^2 |v_\varepsilon|^2 \geq 0,$$
$$\mathcal{E}_-^\varepsilon := -|\lambda| \int_{|v_\varepsilon|\leq 1} |v_\varepsilon| \ln |v_\varepsilon|^2 \geq 0,$$

ainsi que $\tilde{E}_\varepsilon := \mathcal{E}_+^\varepsilon + \mathcal{E}_-^\varepsilon$

- Sachant que $x^2 \ln x^2 \leq C_\delta x^{2-\delta}$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $\delta > 0$, on a pour $\delta = \frac{1}{d+2}$

$$\mathcal{E}_-^\varepsilon \leq C_d \int_{\mathbb{R}^d} |v_\varepsilon|^{2-\delta} \leq C_d \left\| v_\varepsilon \right\|_{L^2}^{2-\left(1+\frac{d}{2}\right)\delta} \left\| y v_\varepsilon \right\|_{L^2}^{\frac{d\delta}{2}} = C_d \left(\mathcal{E}_+^\varepsilon\right)^{\frac{d}{4(d+2)}},$$

Estimées sur v_ε

- Définissons les parties positives et négatives de cette énergie modifiée:

$$\mathcal{E}_+^\varepsilon := \mathcal{E}_{\text{kin}}^\varepsilon + |\lambda| \int_{|v_\varepsilon|>1} |v_\varepsilon|^2 \ln |v_\varepsilon|^2 + |\lambda| \int |y|^2 |v_\varepsilon|^2 \geq 0,$$
$$\mathcal{E}_-^\varepsilon := -|\lambda| \int_{|v_\varepsilon|\leq 1} |v_\varepsilon| \ln |v_\varepsilon|^2 \geq 0,$$

ainsi que $\tilde{E}_\varepsilon := \mathcal{E}_+^\varepsilon + \mathcal{E}_-^\varepsilon$

- Sachant que $x^2 \ln x^2 \leq C_\delta x^{2-\delta}$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $\delta > 0$, on a pour $\delta = \frac{1}{d+2}$

$$\mathcal{E}_-^\varepsilon \leq C_d \int_{\mathbb{R}^d} |v_\varepsilon|^{2-\delta} \leq C_d \left\|v_\varepsilon\right\|_{L^2}^{2-\left(1+\frac{d}{2}\right)\delta} \left\|yv_\varepsilon\right\|_{L^2}^{\frac{d\delta}{2}} = C_d(\mathcal{E}_+^\varepsilon)^{\frac{d}{4(d+2)}},$$

- Par la décroissance de l'énergie modifiée, on obtient finalement

$$\mathcal{E}_+^\varepsilon \leq \tilde{E}_\varepsilon^0(v_{\varepsilon,in}) + C_d \left(\mathcal{E}_+^\varepsilon\right)^{\frac{d}{4(d+2)}}.$$

Ainsi, $\mathcal{E}_+^\varepsilon \leq C\left(\tilde{E}_\varepsilon^0(v_{\varepsilon,in})\right)$.

Estimées sur v_ε

Lemme

Pour tout $t \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |y|^2 \, |v_\varepsilon|^2 \, \mathrm{d}y \leq C\left(\tilde{E}_\varepsilon^0(v_{\varepsilon,in})\right),$$

$$\frac{\varepsilon^2}{\tau(t)^2} \|\nabla_y v_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C\left(\tilde{E}_\varepsilon^0(v_{\varepsilon,in})\right),$$

$$\int_0^\infty \frac{\varepsilon^2 \, \dot{\tau}(t)}{\tau^3(t)} \|\nabla_y v_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \, \mathrm{d}t \leq C\left(\tilde{E}_\varepsilon^0(v_{\varepsilon,in})\right).$$

Moments et équation sur la densité

- La convergence des différents moments se fait en reportant les quantités conservées de u_ε sur v_ε ou grâce à une dynamique explicite.

Moments et équation sur la densité

- La convergence des différents moments se fait en reportant les quantités conservées de u_ε sur v_ε ou grâce à une dynamique explicite.
- Équations hydrodynamiques sur la densité $\rho_\varepsilon := |v_\varepsilon|^2$ et la densité de moment $J_\varepsilon := \varepsilon \operatorname{Im}(\overline{v_\varepsilon} \nabla v_\varepsilon)$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \dfrac{1}{\tau^2(t)} \nabla \cdot J_\varepsilon = 0, \\ \partial_t J_\varepsilon + |\lambda| \nabla \rho_\varepsilon + 2|\lambda| \, y \, \rho_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon^2}{4\,\tau^2(t)} \Delta \nabla \rho_\varepsilon - \dfrac{\varepsilon^2}{\tau^2(t)} \nabla \cdot (\operatorname{Re}(\nabla v_\varepsilon \otimes \overline{\nabla v_\varepsilon})). \end{cases}$$

Moments et équation sur la densité

- La convergence des différents moments se fait en reportant les quantités conservées de u_ε sur v_ε ou grâce à une dynamique explicite.
- Équations hydrodynamiques sur la densité $\rho_\varepsilon := |v_\varepsilon|^2$ et la densité de moment $J_\varepsilon := \varepsilon \operatorname{Im}(\overline{v_\varepsilon} \nabla v_\varepsilon)$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \dfrac{1}{\tau^2(t)} \nabla \cdot J_\varepsilon = 0, \\ \partial_t J_\varepsilon + |\lambda| \nabla \rho_\varepsilon + 2|\lambda|\, y\, \rho_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon^2}{4\,\tau^2(t)} \Delta \nabla \rho_\varepsilon - \dfrac{\varepsilon^2}{\tau^2(t)} \nabla \cdot (\operatorname{Re}(\nabla v_\varepsilon \otimes \overline{\nabla v_\varepsilon})). \end{cases}$$

En les combinant, on obtient:

$$\partial_t(\tau^2\, \partial_t \rho_\varepsilon) = L\rho_\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{4\,|\lambda|\,\tau^2(t)} \Delta^2 \rho_\varepsilon + \frac{1}{|\lambda|} \nabla \cdot (\nabla \cdot \nu_\varepsilon)\,,$$

avec $\nu_\varepsilon := \frac{\varepsilon^2}{\tau^2(t)} \operatorname{Re}\left(\nabla v_\varepsilon \otimes \overline{\nabla v_\varepsilon}\right)$ et où $L = \Delta + \nabla \cdot (2y\, .)$ est l'opérateur de Fokker-Planck harmonique.

Changement de variable

- Changement de variable de temps : $s = \frac{1}{2} \ln \dot{\tau}(t)$.
- L'équation précédente devient :

$$\partial_s \rho_\varepsilon = L\rho_\varepsilon + \frac{2|\lambda|}{e^{2s}\check{\tau}(s)} \nabla \cdot J_\varepsilon + \partial_s \left(\frac{|\lambda|}{e^{2s}\check{\tau}(s)} \nabla \cdot J_\varepsilon \right) - \frac{\varepsilon^2}{4\,|\lambda|\,\check{\tau}(s)^2} \Delta^2 \rho_\varepsilon + \frac{1}{|\lambda|} \nabla \cdot (\nabla \cdot \nu_\varepsilon)$$

Changement de variable

- Changement de variable de temps : $s = \frac{1}{2} \ln \dot{\tau}(t)$.
- L'équation précédente devient :

$$\partial_s \rho_\varepsilon = L\rho_\varepsilon + \frac{2|\lambda|}{e^{2s}\check{\tau}(s)} \nabla \cdot J_\varepsilon + \partial_s \left(\frac{|\lambda|}{e^{2s}\check{\tau}(s)} \nabla \cdot J_\varepsilon \right) - \frac{\varepsilon^2}{4\,|\lambda|\,\check{\tau}(s)^2} \Delta^2 \rho_\varepsilon + \frac{1}{|\lambda|} \nabla \cdot (\nabla \cdot \nu_\varepsilon)$$

- Estimations sur les différents termes :

Lemme

$$\check{\tau}(s)^{-1} \|(1+|y|)J_\varepsilon(s)\|_{L^1} + \int_0^\infty \left(e^{2u}\, \check{\tau}(u)^{-1} \|J_\varepsilon(u)\|_{L^1} \right)^2 \mathrm{d}u \le C\left(\tilde{E}^0_\varepsilon(v_{\varepsilon,in}) \right),$$

$$\|\nu_\varepsilon(s)\|_{L^1} + \int_0^\infty e^{4u}\, \|\nu_\varepsilon(u)\|_{L^1} \mathrm{d}u \le C\left(\tilde{E}^0_\varepsilon(v_{\varepsilon,in}) \right),$$

$$\|\rho_\varepsilon(s)\|_{L^1} = \left\| \gamma^2 \right\|_{L^1}.$$

Décomposition

- On est ramené à étudier

$$\partial_s \rho_\varepsilon = L\rho_\varepsilon + \frac{2|\lambda|}{e^{2s}\check{\tau}(s)} \nabla \cdot J_\varepsilon + \partial_s \left(\frac{|\lambda|}{e^{2s}\check{\tau}(s)} \nabla \cdot J_\varepsilon \right) - \frac{\varepsilon^2}{4\,|\lambda|\,\check{\tau}(s)^2} \Delta^2 \rho_\varepsilon + \frac{1}{|\lambda|} \nabla \cdot (\nabla \cdot \nu_\varepsilon)$$

Décomposition

- On est ramené à étudier

$$\partial_s \rho_\varepsilon = L\rho_\varepsilon + \frac{2|\lambda|}{e^{2s}\check{\tau}(s)}\nabla\cdot J_\varepsilon + \partial_s\left(\frac{|\lambda|}{e^{2s}\check{\tau}(s)}\nabla\cdot J_\varepsilon\right) - \frac{\varepsilon^2}{4\,|\lambda|\,\check{\tau}(s)^2}\Delta^2\rho_\varepsilon + \frac{1}{|\lambda|}\nabla\cdot(\nabla\cdot\nu_\varepsilon)$$

Décomposition

- Formellement en temps grand

$$\partial_s \rho_\varepsilon^\infty = L \rho_\varepsilon^\infty$$

Décomposition

- Formellement en temps grand

$$\partial_s \rho_\varepsilon^\infty = L \rho_\varepsilon^\infty$$

Ces arguments permettent de prouver que $\rho(t) \rightharpoonup \gamma^2$ faiblement dans L^1.

Décomposition

- On est ramené à étudier

$$\partial_s \rho_\varepsilon = L\rho_\varepsilon + \frac{2|\lambda|}{e^{2s}\check{\tau}(s)} \nabla \cdot J_\varepsilon + \partial_s \left(\frac{|\lambda|}{e^{2s}\check{\tau}(s)} \nabla \cdot J_\varepsilon \right) - \frac{\varepsilon^2}{4\,|\lambda|\,\check{\tau}(s)^2} \Delta^2 \rho_\varepsilon + \frac{1}{|\lambda|} \nabla \cdot (\nabla \cdot \nu_\varepsilon)$$

Décomposition

- On est ramené à étudier

$$\partial_s \rho_\varepsilon = L\rho_\varepsilon + g_\varepsilon^1 + g_\varepsilon^2 + g_\varepsilon^3 + g_\varepsilon^4$$

Décomposition

- On est ramené à étudier

$$\partial_s \rho_\varepsilon = L\rho_\varepsilon + g_\varepsilon^1 + g_\varepsilon^2 + g_\varepsilon^3 + g_\varepsilon^4$$

- On décompose la dynamique :

$$\rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon^0 + \rho_\varepsilon^1 + \rho_\varepsilon^2 + \rho_\varepsilon^3 + \rho_\varepsilon^4$$

avec d'un côté

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon^0 = L\rho_\varepsilon^0, \\ \rho_\varepsilon^0(0) = \rho_\varepsilon(0). \end{cases}$$

Décomposition

- On est ramené à étudier

$$\partial_s \rho_\varepsilon = L\rho_\varepsilon + g_\varepsilon^1 + g_\varepsilon^2 + g_\varepsilon^3 + g_\varepsilon^4$$

- On décompose la dynamique :

$$\rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon^0 + \rho_\varepsilon^1 + \rho_\varepsilon^2 + \rho_\varepsilon^3 + \rho_\varepsilon^4$$

de l'autre, pour $j \geq 1$,

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon^j = L\rho_\varepsilon^j + g_\varepsilon^j, \\ \rho_\varepsilon^j(0) = 0. \end{cases}$$

Décomposition

- On est ramené à étudier

$$\partial_s \rho_\varepsilon = L\rho_\varepsilon + g_\varepsilon^1 + g_\varepsilon^2 + g_\varepsilon^3 + g_\varepsilon^4$$

- On décompose la dynamique :

$$\rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon^0 + \rho_\varepsilon^1 + \rho_\varepsilon^2 + \rho_\varepsilon^3 + \rho_\varepsilon^4$$

de l'autre, pour $j \geq 1$,

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon^0 = L\rho_\varepsilon^0, \\ \rho_\varepsilon^0(0) = \rho_\varepsilon(0). \end{cases}$$

Lemme

$$\mathcal{W}_2\left(\frac{\rho_\varepsilon(s)}{\pi^{\frac{d}{2}}}, \frac{\gamma^2}{\pi^{\frac{d}{2}}}\right) \leq e^{-2s}\, \mathcal{W}_2\left(\frac{\rho_{\varepsilon,\mathrm{in}}}{\pi^{\frac{d}{2}}}, \frac{\gamma^2}{\pi^{\frac{d}{2}}}\right), \qquad \forall s \geq 0.$$

Noyau et semi-groupe de Fokker-Planck harmonique

Proposition

L est le générateur d'un semi-groupe continu e^{sL} appelé semi-groupe de Fokker-Planck harmonique, dont le noyau $\mathcal{K} = \mathcal{K}(t,x,y)$ est

$$\mathcal{K}(t,x,y) := \pi^{-\frac{d}{2}} \left(1 - e^{-4t}\right)^{-\frac{d}{2}} \gamma^2\left((x - e^{-2t}y)\left(1 - e^{-4t}\right)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Noyau et semi-groupe de Fokker-Planck harmonique

Proposition

L est le générateur d'un semi-groupe continu e^{sL} appelé semi-groupe de Fokker-Planck harmonique, dont le noyau $\mathcal{K} = \mathcal{K}(t,x,y)$ est

$$\mathcal{K}(t,x,y) := \pi^{-\frac{d}{2}} \left(1 - e^{-4t}\right)^{-\frac{d}{2}} \gamma^2\left((x - e^{-2t}y)\left(1 - e^{-4t}\right)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

De plus, pour tout i et $s \geq 0$, $e^{sL}(\partial_{x_i} f_0) = e^{-2s}\,\partial_{x_i}\left(e^{sL} f_0\right)$.

Noyau et semi-groupe de Fokker-Planck harmonique

Proposition

L est le générateur d'un semi-groupe continu e^{sL} appelé semi-groupe de Fokker-Planck harmonique, dont le noyau $\mathcal{K} = \mathcal{K}(t,x,y)$ est

$$\mathcal{K}(t,x,y) := \pi^{-\frac{d}{2}} \left(1 - e^{-4t}\right)^{-\frac{d}{2}} \gamma^2\left(\left(x - e^{-2t} y\right)\left(1 - e^{-4t}\right)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

De plus, pour tout i et $s \geq 0$, $e^{sL}(\partial_{x_i} f_0) = e^{-2s}\, \partial_{x_i}\left(e^{sL} f_0\right)$.

Lemme

En utilisant la formule de Duhamel,

$$\left\|\rho_\varepsilon^1(s)\right\|_{\dot{W}^{-1,1}} \leq e^{-2s} C\left(\tilde{E}_\varepsilon^0(v_{\varepsilon,in})\right),$$
$$\left\|\rho_\varepsilon^3(s)\right\|_{\dot{W}^{-4,1}} \leq e^{-8s} C\left(\tilde{E}_\varepsilon^0(v_{\varepsilon,in})\right),$$
$$\left\|\rho_\varepsilon^4(s)\right\|_{\dot{W}^{-2,1}} \leq e^{-4s} C\left(\tilde{E}_\varepsilon^0(v_{\varepsilon,in})\right).$$

Fokker-Planck et dérivée temporelle

Proposition

$f := \rho_\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\partial_t \rho_\varepsilon^1$ satisfait $\partial_s f = Lf$ avec donnée initiale $f(0) = -\frac{|\lambda|}{\dot{\tau}(0)}\nabla \cdot J_\varepsilon(0)$.

Fokker-Planck et dérivée temporelle

Proposition

$f := \rho_\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\partial_t \rho_\varepsilon^1$ satisfait $\partial_s f = Lf$ avec donnée initiale $f(0) = -\frac{|\lambda|}{\check{\tau}(0)}\nabla \cdot J_\varepsilon(0)$. Donc

$$\rho_\varepsilon^2 = \frac{1}{2}(L\rho_\varepsilon^1 + g_\varepsilon^1) - \frac{|\lambda|}{\check{\tau}(0)} e^{sL}\nabla \cdot J_\varepsilon(0).$$

Fokker-Planck et dérivée temporelle

Proposition

$f := \rho_\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\partial_t \rho_\varepsilon^1$ satisfait $\partial_s f = Lf$ avec donnée initiale $f(0) = -\frac{|\lambda|}{\check{\tau}(0)} \nabla \cdot J_\varepsilon(0)$. Donc

$$\rho_\varepsilon^2 = \frac{1}{2}(L\rho_\varepsilon^1 + g_\varepsilon^1) - \frac{|\lambda|}{\check{\tau}(0)} e^{sL} \nabla \cdot J_\varepsilon(0).$$

Lemme

On peut décomposer $\rho_\varepsilon^2 = \sum_{j=1}^6 \rho_\varepsilon^{2,j}$ avec

$$\left\| \rho_\varepsilon^{2,j} \right\|_{\dot{W}^{-k_j,1}} \leq e^{-2k_j t} C\left(\tilde{E}_\varepsilon^0(v_{\varepsilon,in}) \right),$$

où k_j sont des entiers non nuls

Distance de Wasserstein et dualité

Théorème (Théorème de dualité de Kantorovich et Rubinstein (1958))

$$\mathcal{W}_1(\mu_1, \mu_2) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \Phi \, \mathrm{d}(\mu_1 - \mu_2), \Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \textit{ continue}, \mathrm{Lip}(\Phi) \leq 1 \right\}.$$

Distance de Wasserstein et dualité

Théorème (Théorème de dualité de Kantorovich et Rubinstein (1958))

$$\mathcal{W}_1(\mu_1, \mu_2) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \Phi \, \mathrm{d}(\mu_1 - \mu_2), \Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \textit{ continue}, \mathrm{Lip}(\Phi) \leq 1 \right\}.$$

Lemme

Soit $\Psi \in \mathcal{S}$ une fonction lisse positive d'intégrale 1, $\delta > 0$ et $\Psi^\delta(x) := \frac{1}{\delta^d} \Psi\left(\frac{x}{\delta}\right)$. Pour Φ est continue et $\mathrm{Lip}(\Phi) \leq 1$, on définit $\tilde{\Phi}^\delta := \Phi * \Psi^\delta$. Alors

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\Phi}^\delta \, \mathrm{d}(\rho_\varepsilon(s) - \gamma^2) - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi \, \mathrm{d}(\rho_\varepsilon(s) - \gamma^2) \right| \leq 2\delta \, \| \, |.| \, \Psi \|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Distance de Wasserstein et dualité

Théorème (Théorème de dualité de Kantorovich et Rubinstein (1958))

$$\mathcal{W}_1(\mu_1,\mu_2) = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} \Phi \,\mathrm{d}(\mu_1-\mu_2), \Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \textit{ continue}, \mathrm{Lip}(\Phi) \leq 1\right\}.$$

Lemme

Soit $\Psi \in \mathcal{S}$ une fonction lisse positive d'intégrale 1, $\delta > 0$ et $\Psi^\delta(x) := \frac{1}{\delta^d}\Psi\left(\frac{x}{\delta}\right)$. Pour Φ est continue et $\mathrm{Lip}(\Phi) \leq 1$, on définit $\tilde{\Phi}^\delta := \Phi * \Psi^\delta$. Alors

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\Phi}^\delta \,\mathrm{d}(\rho_\varepsilon(s) - \gamma^2) - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi \,\mathrm{d}(\rho_\varepsilon(s) - \gamma^2)\right| \leq 2\delta \,\| \,|.|\, \Psi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Lemme

Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $\mathcal{B}(0,1)$ et $0 \leq \chi \leq 1$. On définit $\chi^\delta(x) := \chi(\delta x)$. Alors $\Phi^\delta := \tilde{\Phi}^\delta \chi^\delta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} \Phi^\delta \,\mathrm{d}(\rho_\varepsilon(s) - \gamma^2) - \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\Phi}^\delta \,\mathrm{d}(\rho_\varepsilon(s) - \gamma^2)\right| \leq \delta \int_{\mathbb{R}^d} |y|^2 \,|\rho_\varepsilon(s) - \gamma^2|(\mathrm{d}y).$$

Plan de preuve

- On régularise la fonction-test Φ, puis on lui applique un cut-off avec $\delta = \delta(s) = e^{-2s}$ pour obtenir $\Phi^{\delta(s)}$ (à un reste en e^{-2s} près).
- On introduit la décomposition de ρ_ε :

$$\rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon^0 + \sum_j \tilde{\rho}_\varepsilon^j.$$

- Pour ρ_ε^0, on utilise sa convergence vers γ^2 en distance de Wasserstein.
- Pour tous les autres termes, on utilise le fait qu'il existe pour chacun d'eux un entier k_j non nul tel que

$$\left\| \tilde{\rho}_\varepsilon^j \right\|_{\dot{W}^{-k_j,1}} \leq e^{-2k_j t} C\left(\tilde{E}_\varepsilon^0(v_{\varepsilon,in}) \right),$$

tandis que

$$\left\| \Phi^{\delta(s)} \right\|_{W^{-k,\infty}} \leq \delta(s)^{-(k-1)},$$

pour montrer la convergence du terme associé vers 0 en e^{-2s}.

Transformée de Wigner

Définition

On définit la transformée de Wigner de v_ε pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ par

$$\tilde{W}_\varepsilon(t,y,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\eta\cdot z} v_\varepsilon\left(y + \frac{\varepsilon z}{2}\right) \overline{v_\varepsilon\left(y - \frac{\varepsilon z}{2}\right)} \mathrm{d}z.$$

Transformée de Wigner

Définition

On définit la transformée de Wigner de v_ε pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ par

$$\tilde{W}_\varepsilon(t, y, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\eta \cdot z} v_\varepsilon\left(y + \frac{\varepsilon z}{2}\right) \overline{v_\varepsilon\left(y - \frac{\varepsilon z}{2}\right)} \mathrm{d}z.$$

Proposition

La transformée de Wigner W_ε de u_ε est

$$W_\varepsilon(t, x, \xi) = \frac{\|u_{\varepsilon,\mathrm{in}}\|_{L^2}^2}{\|\gamma^2\|_{L^1}} \tilde{W}_\varepsilon\left(t, \frac{x}{\tau(t)}, \tau(t)\,\xi - \dot{\tau}(t)\,x\right).$$

Limite semi-classique

Lemme

On suppose que $\tilde{E}_\varepsilon^0(v_{\varepsilon,in})$ est uniformément borné en ε.

Limite semi-classique

Lemme

On suppose que $\tilde{E}^0_\varepsilon(v_{\varepsilon,in})$ est uniformément borné en ε.
Il existe une mesure $\tilde{W}$ telle que $\tilde{W}_{\varepsilon_n} \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \tilde{W}$ dans $L^p_{\mathrm{loc}}((0,\infty),\mathcal{A}')$, où
$\mathcal{A} = \left\{\phi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_\xi), (\mathcal{F}_\xi \phi)(x,z) \in L^1(\mathbb{R}^d_z, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d_x))\right\}$.

Limite semi-classique

Lemme

On suppose que $\tilde{E}^0_\varepsilon(v_{\varepsilon,in})$ est uniformément borné en ε.
Il existe une mesure $\tilde{W}$ telle que $\tilde{W}_{\varepsilon_n} \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \tilde{W}$ dans $L^p_{\text{loc}}((0,\infty),\mathcal{A}')$, où $\mathcal{A} = \left\{\phi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_\xi), (\mathcal{F}_\xi \phi)(x,z) \in L^1(\mathbb{R}^d_z, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d_x))\right\}$. De plus,

$$\rho_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \tilde{\rho} := \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{W}(.,.,\mathrm{d}\eta) \qquad \text{dans } \mathcal{C}\left([0,T],\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)\right) \text{ pour tout } T>0,$$

$$J_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} J_0 := \int_{\mathbb{R}^d} \eta\, \tilde{W}(t,y,\mathrm{d}\eta) \quad \text{dans } L^p_{\text{loc}}((0,\infty),\mathcal{M}^s(\mathbb{R}^d)^d),$$

$$\varepsilon^2 \operatorname{Re}\left(\nabla v_\varepsilon \otimes \overline{\nabla v_\varepsilon}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} \nu_0 := \int_{\mathbb{R}^d} \eta \otimes \eta\, \tilde{W}(t,y,\mathrm{d}\eta),$$

Limite semi-classique

Lemme

On suppose que $\tilde{E}^0_\varepsilon(v_{\varepsilon,in})$ est uniformément borné en ε.
Il existe une mesure $\tilde{W}$ telle que $\tilde{W}_{\varepsilon_n} \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \tilde{W}$ dans $L^p_{\mathrm{loc}}((0,\infty),\mathcal{A}')$, où $\mathcal{A} = \left\{\phi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_\xi), (\mathcal{F}_\xi \phi)(x,z) \in L^1(\mathbb{R}^d_z, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d_x))\right\}$. De plus,

$$\rho_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \tilde{\rho} := \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{W}(.,.,\mathrm{d}\eta) \qquad \text{dans } \mathcal{C}\left([0,T], \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)\right) \text{ pour tout } T>0,$$

$$J_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} J_0 := \int_{\mathbb{R}^d} \eta\, \tilde{W}(t,y,\mathrm{d}\eta) \quad \text{dans } L^p_{\mathrm{loc}}((0,\infty), \mathcal{M}^s(\mathbb{R}^d)^d),$$

$$\varepsilon^2 \,\mathrm{Re}\left(\nabla v_\varepsilon \otimes \overline{\nabla v_\varepsilon}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} \nu_0 := \int_{\mathbb{R}^d} \eta\otimes\eta\, \tilde{W}(t,y,\mathrm{d}\eta),$$

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |y|^2\, \tilde{W}(t,\mathrm{d}y,\mathrm{d}\eta) \le C_0, \qquad \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\eta|^2\, \tilde{W}(t,\mathrm{d}y,\mathrm{d}\eta) \le C_0\,\tau(t)^2,$$

Limite semi-classique

Lemme

On suppose que $\tilde{E}^0_\varepsilon(v_{\varepsilon,in})$ est uniformément borné en ε.
Il existe une mesure $\tilde{W}$ telle que $\tilde{W}_{\varepsilon_n} \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \tilde{W}$ dans $L^p_{\mathrm{loc}}((0,\infty),\mathcal{A}')$, où
$\mathcal{A} = \left\{\phi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_\xi), (\mathcal{F}_\xi \phi)(x,z) \in L^1(\mathbb{R}^d_z, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d_x))\right\}$. De plus,

$$\rho_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \tilde{\rho} := \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{W}(.,.,\mathrm{d}\eta) \qquad \text{dans } \mathcal{C}\left([0,T],\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)\right) \text{ pour tout } T>0,$$

$$J_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} J_0 := \int_{\mathbb{R}^d} \eta\, \tilde{W}(t,y,\mathrm{d}\eta) \quad \text{dans } L^p_{\mathrm{loc}}((0,\infty),\mathcal{M}^s(\mathbb{R}^d)^d),$$

$$\varepsilon^2 \,\mathrm{Re}\left(\nabla v_\varepsilon \otimes \overline{\nabla v_\varepsilon}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} \nu_0 := \int_{\mathbb{R}^d} \eta \otimes \eta\, \tilde{W}(t,y,\mathrm{d}\eta),$$

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |y|^2\, \tilde{W}(t,\mathrm{d}y,\mathrm{d}\eta) \leq C_0, \qquad \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\eta|^2\, \tilde{W}(t,\mathrm{d}y,\mathrm{d}\eta) \leq C_0\, \tau(t)^2,$$

$$\int_0^\infty \frac{\dot{\tau}(t)}{\tau^3(t)} \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\eta|^2\, \tilde{W}(t,\mathrm{d}y,\mathrm{d}\eta)\,\mathrm{d}t \leq C_0.$$

Dynamique universelle à la limite semi-classique

- Les équations hydrodynamiques

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \dfrac{1}{\tau^2(t)} \nabla \cdot J_\varepsilon = 0, \\ \partial_t J_\varepsilon + |\lambda| \, \nabla \rho_\varepsilon + 2|\lambda| \, y \, \rho_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon^2}{4 \, \tau^2(t)} \Delta \nabla \rho_\varepsilon - \dfrac{\varepsilon^2}{\tau^2(t)} \nabla \cdot (\mathrm{Re}(\nabla v_\varepsilon \otimes \overline{\nabla v_\varepsilon})). \end{cases}$$

Dynamique universelle à la limite semi-classique

- Les équations hydrodynamiques passent à la limite $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho} + \dfrac{1}{\tau^2(t)} \nabla \cdot J_0 = 0, \\ \partial_t J_0 + |\lambda| \, \nabla \tilde{\rho} + 2|\lambda| \, y \, \tilde{\rho} = -\dfrac{1}{\tau^2(t)} \nabla \cdot \nu_0. \end{cases}$$

Dynamique universelle à la limite semi-classique

- Les équations hydrodynamiques passent à la limite $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho} + \dfrac{1}{\tau^2(t)} \nabla \cdot J_0 = 0, \\ \partial_t J_0 + |\lambda| \, \nabla \tilde{\rho} + 2|\lambda| \, y \, \tilde{\rho} = -\dfrac{1}{\tau^2(t)} \nabla \cdot \nu_0. \end{cases}$$

- Les estimations de $(\tilde{\rho}, J_0, \nu_0)$ sont les mêmes que celles de $(\rho_\varepsilon, J_\varepsilon, \varepsilon^2 \operatorname{Re}(\nabla v_\varepsilon \otimes \overline{\nabla v_\varepsilon}))$.

Dynamique universelle à la limite semi-classique

- Les équations hydrodynamiques passent à la limite $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho} + \dfrac{1}{\tau^2(t)} \nabla \cdot J_0 = 0, \\ \partial_t J_0 + |\lambda| \, \nabla \tilde{\rho} + 2|\lambda| \, y \, \tilde{\rho} = -\dfrac{1}{\tau^2(t)} \nabla \cdot \nu_0. \end{cases}$$

- Les estimations de $(\tilde{\rho}, J_0, \nu_0)$ sont les mêmes que celles de $(\rho_\varepsilon, J_\varepsilon, \varepsilon^2 \, \mathrm{Re}(\nabla v_\varepsilon \otimes \overline{\nabla v_\varepsilon}))$.
$\Longrightarrow$ Les mêmes arguments s'appliquent

Dynamique universelle à la limite semi-classique

- Les équations hydrodynamiques passent à la limite $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho} + \dfrac{1}{\tau^2(t)} \nabla \cdot J_0 = 0, \\ \partial_t J_0 + |\lambda| \, \nabla \tilde{\rho} + 2|\lambda| \, y \, \tilde{\rho} = -\dfrac{1}{\tau^2(t)} \nabla \cdot \nu_0. \end{cases}$$

- Les estimations de $(\tilde{\rho}, J_0, \nu_0)$ sont les mêmes que celles de $(\rho_\varepsilon, J_\varepsilon, \varepsilon^2 \, \mathrm{Re}(\nabla v_\varepsilon \otimes \overline{\nabla v_\varepsilon}))$.
$\Longrightarrow$ Les mêmes arguments s'appliquent

Théorème (Ferriere, 2019)

$$\mathcal{W}_1 \left(\frac{\tilde{\rho}}{\pi^{\frac{d}{2}}}, \frac{\gamma^2}{\pi^{\frac{d}{2}}} \right) \leq C \frac{1}{\sqrt{\ln t}}.$$

Système d'Euler isotherme cinétique

Formellement, la mesure de Wigner pour les solutions d'une équation de Schrödinger

$$i\varepsilon\partial_t u_\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u_\varepsilon = f(|u_\varepsilon|^2)u_\varepsilon$$

satisfait l'équation cinétique associée (Lions & Paul, 1993)

$$\partial_t W + \xi \cdot \nabla_x W + \nabla_x f(\rho) \cdot \nabla_\xi W = 0.$$

Système d'Euler isotherme cinétique

Formellement, la mesure de Wigner pour les solutions d'une équation de Schrödinger

$$i\varepsilon\partial_t u_\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u_\varepsilon = f(|u_\varepsilon|^2)u_\varepsilon$$

satisfait l'équation cinétique associée (Lions & Paul, 1993)

$$\partial_t W + \xi \cdot \nabla_x W + \nabla_x f(\rho) \cdot \nabla_\xi W = 0.$$

Définition (Système d'Euler isotherme cinétique)

$$\partial_t W + \xi \cdot \nabla_x W + \nabla_x \ln \rho \cdot \nabla_\xi W = 0.$$

Une équation encore mal comprise

- Les paramètres (ρ, v) des solutions monocinétiques $\rho \otimes \delta_{\xi=v}$ de cette équation sont solutions du système d'Euler isotherme.
- Apparaît également comme la *limite quasi-neutre* formelle du système de Vlasov-Poisson avec *électrons sans masse*.
- Rigoureusement prouvé dans le tore en espace loin du vide : Han-Kwan & Iacobelli, 2017; Griffin-Pickering & Iacobelli, 2020.
- Aucune théorie de Cauchy prouvée dans l'espace entier $\mathbb{R}^d$ pour des mesures finies.
- Pour notre cas, la non-linéarité n'est pas lisse, et le lien entre la mesure de Wigner précédemment obtenue et le système d'Euler isotherme cinétique ne reste que formel.
- Cependant, l'énergie et les équations "hydro" (formelles) sont les mêmes ! Une solution globale de cette équation devrait donc également avoir le même comportement en temps long.
- Solutions "gaussiennes" explicites : Ferriere, 2019.

Merci pour votre attention !

Outline

4 Régime défocalisant

5 Régime focalisant

6 Fluide/solide

Convergence des moments

$$I_1(t) := \operatorname{Im} \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \overline{v}(t,y)\, \nabla v(t,y)\, \mathrm{d}y, \qquad I_2(t) := \int_{\mathbb{R}^d} y\, |v(t,y)|^2\, \mathrm{d}y,$$
$$\tilde{I}_2(t) := \tau(t)\, I_2(t),$$

Alors $\ddot{\tilde{I}}_2 = 0$, et donc $I_2(t) = \tau(t)^{-1}(-I_1(0)t + I_2(0))$.

Convergence des moments

$$I_1(t) := \operatorname{Im} \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \overline{v}(t,y)\, \nabla v(t,y)\, \mathrm{d}y, \qquad I_2(t) := \int_{\mathbb{R}^d} y\, |v(t,y)|^2\, \mathrm{d}y,$$
$$\tilde{I}_2(t) := \tau(t)\, I_2(t),$$

Alors $\ddot{\tilde{I}}_2 = 0$, et donc $I_2(t) = \tau(t)^{-1}(-I_1(0)t + I_2(0))$. Quant à $\|y\, v(t)\|_{L^2}^2$, l'énergie de u donne en terme de v:

$$\frac{\dot{\tau}^2}{2} \int |y|^2 |v|^2 - \overbrace{\lambda d \left\| \gamma^2 \right\|_{L^1} \ln \tau}^{\dot{\tau}^2 = 4\lambda \ln \tau}$$
$$- \underbrace{\frac{\dot{\tau}}{\tau} \operatorname{Im} \int v(t,y)\, y\, \overline{\nabla v}(t,y)\, \mathrm{d}y}_{O(\dot{\tau})}$$
$$+ \overbrace{\mathcal{E}_{\mathrm{kin}} + \lambda \int |v|^2 \ln |v|^2}^{O(1)} = \mathrm{cste},$$

Système d'Euler isotherme cinétique

Système d'Euler isotherme cinétique

$$\partial_t f + \xi \cdot \nabla_x f + \lambda \nabla_x (\ln \rho) \cdot \nabla_\xi f = 0.$$

- Limite quasi-neutre *formelle* de Vlasov-Poisson
- Plusieurs études sur le tore : Han-Kwan & Iacobelli, 2017; Griffin-Pickering & Iacobelli, 2020
- Sur $\mathbb{R}^d$:
  - Problème de Cauchy pas encore résolu (mal posé ?)
  - Solutions "gaussiennes" explicites : Ferriere, 2019

Outline

4 Régime défocalisant

5 Régime focalisant

6 Fluide/solide

Superposition non-linéaire

Théorème (Superposition non-linéaire)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ *et* $x_k \in \mathbb{R}^d$, $A_k \in S_d(\mathbb{C})$ *avec* $\operatorname{Re} A_k$ *définie positive,* $\omega_k \in \mathbb{R}$ *et* $\theta_k \in \mathbb{R}$ *pour* $k = 1, \dots, N$ *et* $v \in \mathbb{R}$*. Soit* u *la solution de* (logNLS) *avec donnée initiale* $u_{\text{in}} := G(0)$ *où* $G := \sum G^d_{A_k,\omega_k,x_k,v,\theta_k}$*. On définit*

$$\tau_- := \frac{1}{2} \min_{t,k} \sigma(\operatorname{Re} A_k(t)), \qquad \tau_+ := \frac{1}{2} \max_{t,k} \sigma(\operatorname{Re} A_k(t)).$$

Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ *ne dépendant que de* $\delta\omega := \max_k |\omega_k - \omega_{k+1}|$, τ_-, τ_+ *et* N *tel que si*

$$\varepsilon := \left(\min_k |x_{k+1} - x_k|\right)^{-1} < \varepsilon_0,$$

alors pour tout $t \geq 0$

$$\|u(t) - G(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_d N^{\frac{3}{2}} \frac{\lambda \tau_+}{\varepsilon^{\frac{d}{2}+1}\sqrt{\tau_-}} \exp\left[-\frac{\tau_-}{4\varepsilon^2} + \max_j \omega_j + 2\lambda t\right].$$

Développement limité "faible" de $|x|^2 \ln |x|^2$

Lemme

Soit

$$F_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$
$$z \mapsto |z|^2 \left(\ln|z|^2 - 1\right),$$

Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $\zeta := z_1 - z_2$, on a

$$F_1(z_1) \leq F_1(z_2) + 2\,\mathrm{Re}\left(z_2 \overline{\zeta}\right) \ln|z_2|^2 + 2\,|\zeta|^2 \left(\ln\left(\max(|z_2|, |z_1|)\right) + 1\right).$$

Outline

4 Régime défocalisant

5 Régime focalisant

6 Fluide/solide

Problème fluide/solide

Disque rigide de centre $h(t)$, de vitesse angulaire ω, de rayon 1, dans un fluide newtonien de vitesse $u(t,x)$ dans $\mathbb{R}^2$.

Equations du mouvement

Dans le fluide :
$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = 0,$$
$$\operatorname{div} u = 0,$$

Sur le bord du disque :
$$u(t,x) = h'(t) + \omega(t)(x-h(t))^{\perp},$$

Mouvement du disque :
$$mh''(t) = -\int_{\partial B(t)} \Sigma(u)n \,\mathrm{d}\sigma(x),$$
$$\mathcal{J}\omega'(t) = -\int_{\partial B(t)} (x-h(t))^{\perp}\cdot \Sigma(u)n\,\mathrm{d}\sigma(x).$$

$\Sigma(v) = -p\,\mathrm{Id} + 2\nu D(u)$ est le tenseur des contraintes, où $D(u)$ est le gradient symétrique:
$$D(u)_{i,j} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big), \qquad 1\le i,j\le 2.$$

Changement de variables

Changement de variables (à la Ervedoza, Hillairet & Lacave, 2014)

$$v(t,x) = u(t, x-h(t)), \qquad \tilde{p} = p(t, x-h(t)), \qquad \ell_v(t) = h'(t).$$

Equations du mouvement modifiés

Dans le fluide $\mathcal{F}_0$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + ((v - \ell_v(t)) \cdot \nabla) v - \nu \Delta v + \nabla \tilde{p} = 0,$$

$$\operatorname{div} v = 0,$$

Sur le bord du disque ∂B_0 :

$$v(t,x) = \ell_v(t) + \omega_v(t)\, x^{\perp},$$

Mouvement du disque B_0 :

$$m\ell_v'(t) = -\int_{\partial B_0} \Sigma(v) n \,\mathrm{d}\sigma(x),$$

$$\mathcal{J}\omega'(t) = -\int_{\partial B_0} (x - h(t))^{\perp} \cdot \Sigma(v) n \,\mathrm{d}\sigma(x).$$

Vortex d'Oseen

Définition (Vortex d'Oseen)

$$\Theta(t,x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^{\perp}}{|x|^2} \left(1 - e^{-\frac{|x|^2}{4(1+t)}}\right).$$

Proposition

Le vortex d'Oseen est solution de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^2$.

Vortex d'Oseen

Définition (Vortex d'Oseen)

$$\Theta(t,x) = \frac{1}{2\pi}\frac{x^\perp}{|x|^2}\left(1 - e^{-\frac{|x|^2}{4(1+t)}}\right) = x^\perp g(t,|x|^2).$$

Proposition

Le vortex d'Oseen est solution de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^2$.

On cherche des solutions pour notre problème sous la forme :

- $v(t,x) = \alpha\Theta(t,x) + w(t,x)$,
- $\ell_v(t) = \ell_w(t)$,
- $\omega_v(t) = \alpha g(t,1) + \omega_w(t)$

Stabilité du vortex d'Oseen pour un obstacle fixe

Théorème (Gallay & Maekawa, 2013)

Pour un obstacle fixe, pour tout $q \in (1,2)$, il existe une constante $\varepsilon > 0$ tel que pour toute donnée initiale de la forme $u_0 = \alpha\Theta(0,x)\chi(x) + v_0$ avec $v_0 \in L^2_\sigma \cap L^q$ et $|\alpha| < \varepsilon$ et χ un cut-off, alors il existe une solution globale $u = \alpha\Theta\chi + v$, qui satisfait en plus

$$\|v(t)\|_{L^2} + \sqrt{t}\|\nabla v(t)\|_{L^2} = O(t^{-\mu}),$$

quand $t \to \infty$ et pour $\mu = \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$.

Schéma de preuve :

- Théorie de Cauchy locale via formulation intégrale du problème (avec semi-groupe de Stokes A) + conclusion pour petites données initiales,
- Energie sur v qui croît au plus comme $\alpha^2 \log t$,
- Utilisation de l'opérateur fractionnaire $\mathrm{A}^{-\mu}$: estimation d'énergie pour $\mathrm{A}^{-\mu} v$ qui croit au plus comme $\exp\left(\int_0^t \|\nabla v(s)\| \,\mathrm{d}s\right) \lesssim t^{C\alpha^2}$
- Utilisation de ces propriétés pour montrer une propriété de petitesse de $\|v(t)\|_{L^2}$ pour un certain $t > 0$.

Résultats espérés VS. déjà prouvés

- Reproduction de la preuve de Gallay & Maekawa dans le cadre d'un disque en mouvement, en y intégrant ℓ et ω :

$$\|v(t)\|_{L^2} + \sqrt{t}(\|\nabla v(t)\|_{L^2} + |l(t)|^2 + |\omega(t)|^2) = O(t^{-\mu}),$$

  - Cut-off non nécessaire au vu des conditions au bord de la structure
  - Résultat prouvé dans le cas des petites données initiales
  - Energie croissant au plus logarithmiquement
  - Problème dans l'estimation d'énergie de $\mathrm{A}^{-\mu} v$: on a aussi $\exp\left(\int_0^t |l(s)|^2 \,\mathrm{d}s\right)$

Résultats espérés VS. déjà prouvés

- Reproduction de la preuve de Gallay & Maekawa dans le cadre d'un disque en mouvement, en y intégrant ℓ et ω :

$$\|v(t)\|_{L^2} + \sqrt{t}(\|\nabla v(t)\|_{L^2} + |l(t)|^2 + |\omega(t)|^2) = O(t^{-\mu}),$$

  - Cut-off non nécessaire au vu des conditions au bord de la structure
  - Résultat prouvé dans le cas des petites données initiales
  - Energie croissant au plus logarithmiquement
  - Problème dans l'estimation d'énergie de $\mathrm{A}^{-\mu} v$: on a aussi $\exp\left(\int_0^t |l(s)|^2 \, \mathrm{d}s\right)$
- 2e terme de l'asymptotique : $U_{\vec{\mathcal{M}}} = \nabla^\perp(\Theta \cdot \vec{\mathcal{M}})$?
  - Terme principal pour le sous-groupe de Stokes provenant de la linéarisation du système (Ervedoza, Hillairet & Lacave, 2014)
  - Pour le problème non-linéaire dans le cas énergie finie ($\alpha = 0$), décroissance de la solution comme ce terme

Alex H. Ardila. "Orbital stability of Gausson solutions to logarithmic Schrödinger equations". *Electron. J. Differential Equations* (2016), Paper No. 335, 9.

Iwo Białynicki-Birula & Jerzy Mycielski. "Nonlinear wave mechanics". *Ann. Physics* 100.1-2 (1976), pp. 62–93.

Thierry Cazenave. *Semilinear Schrödinger equations*. Vol. 10. Courant Lecture Notes in Mathematics. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003, pp. xiv+323.

Thierry Cazenave. "Stable solutions of the logarithmic Schrödinger equation". *Nonlinear Anal.* 7.10 (1983), pp. 1127–1140.

Rémi Carles & Isabelle Gallagher. "Universal dynamics for the defocusing logarithmic Schrodinger equation". *Duke Mathematical Journal* 167.9 (2018), pp. 1761–1801.

Thierry Cazenave & Alain Haraux. "Equations d'évolution avec non linéarité logarithmique". *Annales de la faculté de sciences de Toulouse, 5e série* II (1980), pp. 21–55.

S. Ervedoza, M. Hillairet & C. Lacave. "Long-time behavior for the two-dimensional motion of a disk in a viscous fluid". *Comm. Math. Phys.* 329.1 (2014), pp. 325–382.

Guillaume Ferriere. "Convergence rate in Wasserstein distance and semiclassical limit for the defocusing logarithmic Schrödinger equation". *Analysis & PDE* (Mar. 2019). To appear.

Guillaume Ferriere. "Existence of multi-solitons for the focusing logarithmic Schrödinger equation". *Annales de l'Institut Henri Poincare / Analyse non lineaire* (2020).

Megan Griffin-Pickering & Mikaela Iacobelli. "Singular limits for plasmas with thermalised electrons". *J. Math. Pures Appl. (9)* 135 (2020), pp. 199–255.

P. Guerrero, J. L. López & J. Nieto. "Global H^1 solvability of the 3D logarithmic Schrödinger equation". *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 11.1 (2010), pp. 79–87.

Thierry Gallay & Yasunori Maekawa. "Long-time asymptotics for two-dimensional exterior flows with small circulation at infinity". *Anal. PDE* 6.4 (2013), pp. 973–991.

Daniel Han-Kwan & Mikaela Iacobelli. "The quasineutral limit of the Vlasov-Poisson equation in Wasserstein metric". *Commun. Math. Sci.* 15.2 (2017), pp. 481–509.

Pierre-Louis Lions & Thierry Paul. "Sur les mesures de Wigner.". fre. *Revista Matemática Iberoamericana* 9.3 (1993), pp. 553–618.